TS 2 - Trigonométrie : correction des exercices d'entraînement.

I • On a $\dfrac{2013\pi}{4} = \dfrac{(2016-3)\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{2016\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + 504\pi = -\dfrac{3\pi}{4} + 252\times 2\pi$

Comme cos et sin sont 2π-périodiques, on en déduit que $\cos\left(\dfrac{2013\pi}{4}\right) = \cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{2013\pi}{4}\right) = \sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

• On a $-\dfrac{2015\pi}{3} = -\dfrac{2016\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} - 672\pi = \dfrac{\pi}{3} - 336\times 2\pi$ donc $\cos\left(-\dfrac{2015\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(-\dfrac{2015\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

II Posons $X = \cos x$; on a $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \iff 2X^2 - 3X - 2 = 0$. Cette dernière équation est du second degré : le discriminant vaut $\Delta = 25 > 0$ et il y a deux solutions distinctes : $X_1 = -\dfrac{1}{2}$ et $X_2 = 2$ (détail du calcul laissé au lecteur).

Ainsi, $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \iff \Big(\cos x = -\dfrac{1}{2}$ ou $\underbrace{\cos x = 2}_{\text{impossible car } -1 \leq \cos x \leq 1}\Big) \iff \cos x = -\dfrac{1}{2}$

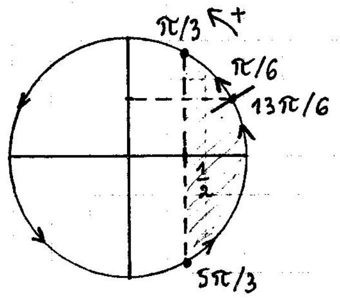
a) L'ensemble des solutions est $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

b) $S = \left\{-\dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{2\pi}{3}\right\}$ c) $S = \left\{-\dfrac{4\pi}{3} ; -\dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{2\pi}{3} ; \dfrac{4\pi}{3}\right\}$

d) $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

III a)

x	0		$\pi/6$ *		$3\pi/2$ ϟ		2π
$x+\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{5\pi}{3}$		$\dfrac{13\pi}{6}$
$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$	$\sqrt{3}/2$	↘	$1/2$	↘ -1 ↗	$1/2$	↗	$\sqrt{3}/2$

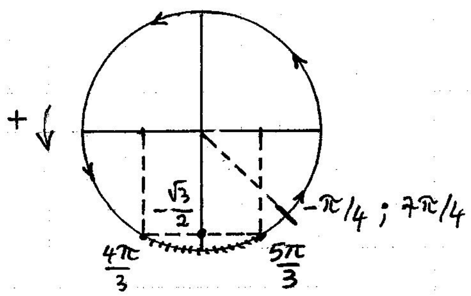


Si $x\in[0;2\pi]$, $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) \geq \dfrac{1}{2} \iff x \in \left[0;\dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$

(détails : * $x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} \iff x = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$ ϟ $x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{3} \iff x = \dfrac{5\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{10\pi - \pi}{6} = \dfrac{3\pi}{2}$)

b)

x	0		$19\pi/12$ (•)		$23\pi/12$ □		2π
$x-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{4}$		$\dfrac{4\pi}{3}$		$\dfrac{5\pi}{3}$		$\dfrac{7\pi}{4}$
$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	↗ 1 ↘	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↘ -1 ↗	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$-\sqrt{2}/2$



Si $x\in[0;2\pi]$, $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) < -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left]\dfrac{19\pi}{12} ; \dfrac{23\pi}{12}\right[$

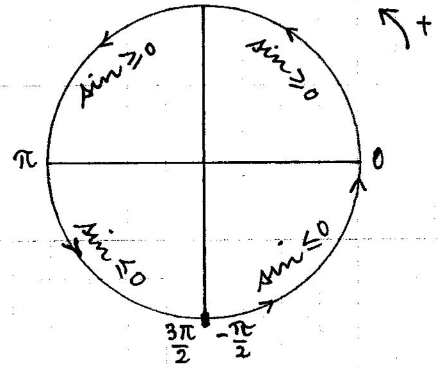
(détails : (•) $x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{3} \iff x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{19\pi}{12}$ □ $x - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{3} \iff x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{23\pi}{12}$)

IV a). Si $x\in\mathbb{R}$, on a $f\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[3\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right] = \cos\left(3x + 2\pi - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\right)$, d'où $f\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ car cos est 2π-périodique, soit $f\left(x+\dfrac{2\pi}{3}\right) = f(x)$, ce qui prouve que f est $\dfrac{2\pi}{3}$-périodique.

• f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' : x \mapsto -3\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$, d'où :

x	0		$\frac{\pi}{6}$ *		$\frac{\pi}{2}$ □		$\frac{2\pi}{3}$
$3x-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	↗	1	↘	-1	↗	0

$(-3<0)$



(détails : $3x-\frac{\pi}{2}=0 \iff 3x=\frac{\pi}{2} \iff x=\frac{\pi}{6}^{*}$; $3x-\frac{\pi}{2}=\pi \iff 3x=\frac{3\pi}{2} \iff x=\frac{\pi}{2}$

$f(0)=\cos\left(3\times 0-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$; $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos(0)=1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi=-1$; $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{3\pi}{2}=0$)

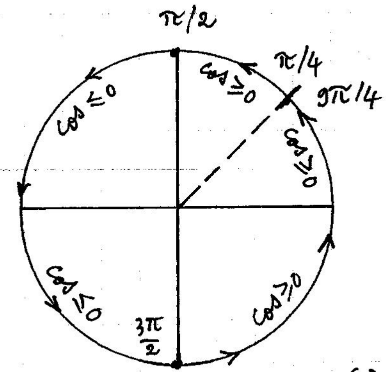
b) • Si $x\in\mathbb{R}$, on a $g(x+4\pi)=3\sin\left(\frac{x+4\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}+2\pi\right)\underset{\uparrow}{=}3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$,

d'où $g(x+4\pi)=g(x)$, ce qui prouve que g est 4π-périodique. {car sin est 2π-périodique.

• La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g' : x \mapsto 3\times\frac{1}{2}\times\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, d'où :

x	0		$\frac{\pi}{2}$ ♮		$\frac{5\pi}{2}$ (•)		4π
$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{9\pi}{4}$
$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	↗	3	↘	-3	↗	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

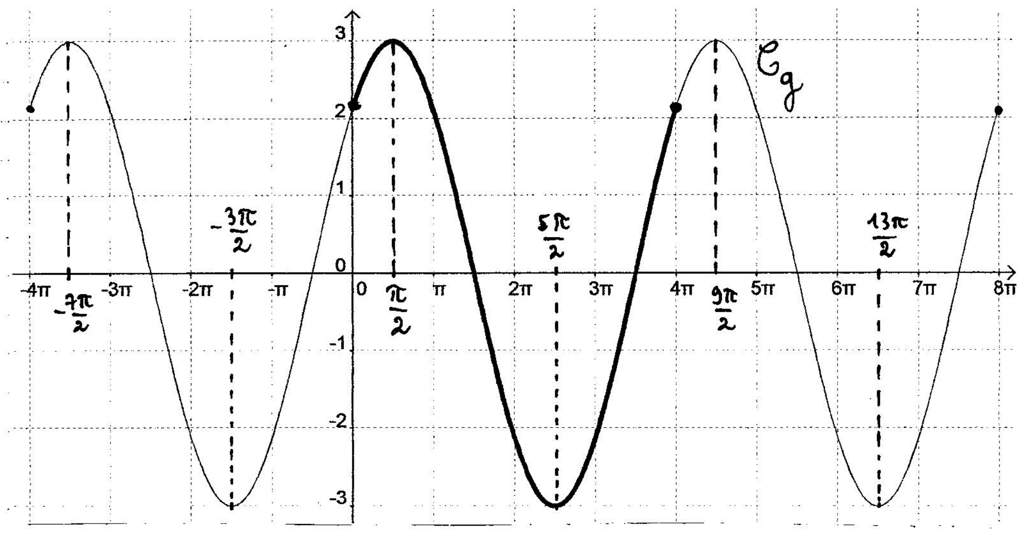
$\left(\frac{3}{2}>0\right)$



(détails : $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \iff \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4} \iff x=\frac{\pi}{2}$ ♮ ; $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2} \iff \frac{x}{2}=\frac{5\pi}{4} \iff x=\frac{5\pi}{2}$ (•)

$g(0)=3\sin\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\frac{\pi}{2}=3$; $g\left(\frac{5\pi}{2}\right)=3\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-3$; $g(4\pi)=3\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$)

Par 4π-périodicité de g, on déduit son graphe sur $[-4\pi ; 8\pi]$:



$\boxed{V}$ 1) a) B_1 est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse π donc $y_{B_1} = f(\pi) = (2\pi - \frac{\pi}{2})\underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \underbrace{\sin 2\pi}_{0}$,

soit $y_{B_1} = 2\pi - \frac{\pi}{2} = 2x_{B_1} - \frac{\pi}{2}$, d'où $B_1 \in \Delta$.

1) b) B_k est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $k\pi$ donc $y_{B_k} = f(k\pi) = (2k\pi - \frac{\pi}{2})\underbrace{\cos(2k\pi)}_{1} - \underbrace{\sin(2k\pi)}_{0}$,

soit $y_{B_k} = 2k\pi - \frac{\pi}{2} = 2x_{B_k} - \frac{\pi}{2}$, d'où $B_k \in \Delta$

2) b) On peut conjecturer :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
f	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$

2) a) $f(\frac{\pi}{4}) = (2\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})\cos(2\frac{\pi}{4}) - \sin(2\frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

3) a) On a $f(x) = u(x)v(x) - w(x)$ avec $u(x) = (2x - \frac{\pi}{2})$, $v(x) = \cos(2x)$ et $w(x) = \sin(2x)$.

Or $u'(x) = 2$, $v'(x) = -2\sin(2x)$ et $w'(x) = 2\cos(2x)$, donc :

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - w'(x)$

$= 2\cos(2x) + (2x - \frac{\pi}{2})(-2\sin(2x)) - 2\cos(2x) = (\pi - 4x)\sin(2x)$

3) b)

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\pi - 4x$		$+$	0		$-$		
$2x$	0		$\frac{\pi}{2}$		π		2π
$\sin(2x)$	0		$+$		0	$-$	0
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

$f'(x) = (\pi - 4x)\sin(2x)$

Le signe de $f'(x)$ valide le tableau des variations de f conjecturé au 2)