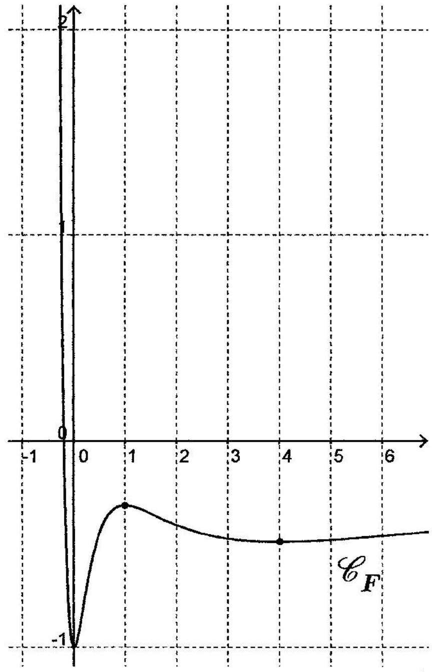
TS2 - Correction du devoir de Mathématiques à rendre le 02/11.

$\boxed{\text{I}}$ On a $F = \dfrac{u}{v}$ avec $u : x \mapsto -6x^3 + 6x^2 - 4x - 1$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et somme et $v : x \mapsto (x+1)^4$ dérivable par somme et produit sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $]-1;+\infty[$.

Donc F est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $F' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.



(donné à titre de curiosité)

Comme $v = w^4$ avec $w : x \mapsto x+1$, on a $v' = 4 \times w' \times w^{4-1}$, soit $v'(x) = 4 \times 1 \times (x+1)^3 = 4(x+1)^3$. Par conséquent,

$$F'(x) = \frac{(-18x^2+12x-4)(x+1)^4 - 4(x+1)^3(-6x^3+6x^2-4x-1)}{\left[(x+1)^4\right]^2}$$

soit
$$F'(x) = \frac{(x+1)^3\left[(x+1)(-18x^2+12x-4) - 4(-6x^3+6x^2-4x-1)\right]}{(x+1)^8}$$

$$= \frac{-18x^3+12x^2-4x-18x^2+12x-4+24x^3-24x^2+16x+4}{(x+1)^{8-3}}$$

$$= \frac{6x^3-30x^2+24x}{(x+1)^5} = \frac{6x(x^2-5x+4)}{(x+1)^5}.$$

Lorsque $x \in]-1,+\infty[$, on a $x > -1$, soit $x+1 > 0$ d'où $(x+1)^5 > 0$. Ainsi $F'(x)$ est du signe de $6x(x^2-5x+4)$. L'étude (classique !) du trinôme x^2-5x+4 prouve qu'il possède 2 racines : 1 et 4. On en déduit :

x	-1		0		1		4		$+\infty$
$6x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-5x+4		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
F	‖	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{5}{16}$	$\searrow$	$-\frac{61}{125}$	$\nearrow$	

x^2-5x+4 est du signe de $a = 1$ (c'est-à-dire positif) sauf entre les racines.

$$F(1) = \frac{-6+6-4-1}{(1+1)^4} = -\frac{5}{16}$$

$$F(4) = \frac{-384+96-16-1}{(4+1)^4} = -\frac{305}{625} = -\frac{61}{125}$$

$\boxed{\text{II}}$ 1) $f(x)$ n'est défini que lorsque $2x - x^2 \geqslant 0 \iff x(2-x) \geqslant 0$. Un tableau de signe (détails laissés au lecteur) prouve alors que $\mathcal{D} = [0;2]$ et que pour tout $x \in]0;2[$, on a $x(2-x) > 0$.

2) On a $f = uv$ avec $u : x \mapsto x - 2$ et $v = \sqrt{w}$ où $w : x \mapsto 2x - x^2$.
w est dérivable (par produit et somme) et strictement positive sur $]0;2[$ donc v est dérivable sur $]0;2[$ de dérivée $v' = \dfrac{w'}{2\sqrt{w}} : x \mapsto \dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

Comme u est également dérivable sur $]0;2[$, f est dérivable par produit sur $]0;2[$ et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 1 \times \sqrt{2x-x^2} + (x-2)\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

d'où $f'(x) = \dfrac{\sqrt{2x-x^2}^{\,2} + (x-2)(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{2x - x^2 + x - x^2 - 2 + 2x}{\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{-2x^2+5x-2}{\sqrt{2x-x^2}}$

3) Lorsque $x \in]0;2[$, on a $\sqrt{2x-x^2} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-2x^2+5x-2$, trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 9$ et qui possède donc les 2 racines :
$x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{9}}{-4} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{9}}{-4} = \dfrac{1}{2}$. On en déduit :

x	0		$\frac{1}{2}$		2
$-2x^2+5x-2$		$-$	0	$+$ (*)	0
f	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	0

$f(0) = (0-2)\sqrt{2\times 0 - 0^2} = -2 \times 0 = 0$
$f(2) = (2-2)\sqrt{2\times 2 - 2^2} = 0 \times 0 = 0$
$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}-2\right)\sqrt{2\times\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$

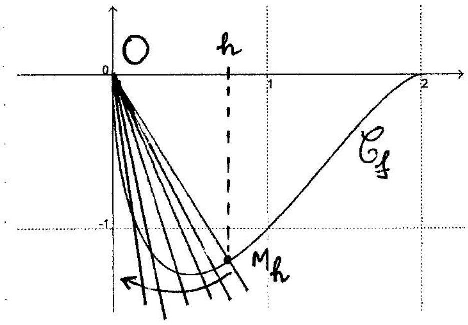
(*) $-2x^2+5x-2$ est du signe de $-(-2) = 2$ entre ses racines.

4) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Or $f'(1) = \dfrac{-2+5-2}{\sqrt{2-1}} = 1$ et $f(1) = (1-2)\sqrt{2-1} = -1$

donc $T : y = 1\times(x-1) + (-1)$ soit $T : y = x - 2$.

5)a) Soit $h \in]0;2]$; on a $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{f(h)}{h} = \dfrac{(h-2)\sqrt{2h-h^2}}{h} = \dfrac{(h-2)\sqrt{h(2-h)}}{h}$

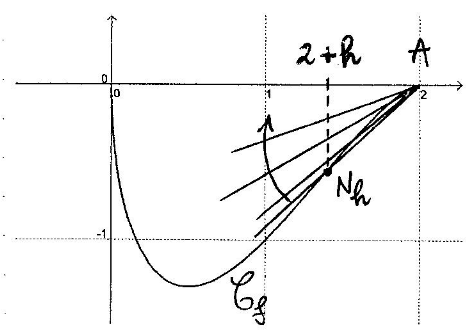
d'où $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{(h-2)\sqrt{h}\sqrt{2-h}}{h} = \dfrac{(h-2)\sqrt{2-h}}{\sqrt{h}}$. Lorsque h tend vers 0, le numérateur tend vers $(0-2)\sqrt{2-0} = -2\sqrt{2}$ et le dénominateur tend vers $\sqrt{0} = 0$ en restant strictement positif. Par conséquent $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tend vers $-\infty$ lorsque h tend vers 0.



Or $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ est la pente de la droite (OM_h), où M_h est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse h (voir ci-contre). Comme la pente de (OM_h) tend vers $-\infty$ lorsque h tend vers 0, cela signifie que (OM_h) tend vers une position limite verticale. On dit que $\mathcal{C}_f$ possède une demi-tangente verticale au point O.

5)b) Soit $h \in [-2;0[$; on a $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{(2+h-2)\sqrt{2(2+h)-(2+h)^2}}{h} = \dfrac{h\sqrt{-h^2-2h}}{h}$

soit $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \sqrt{-h^2-2h}$. Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ tend donc vers $\sqrt{-0^2-2\times 0} = \sqrt{0} = 0$. Or $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ est la pente



de la droite (AN_h), où N_h est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $2+h$ et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 2. La pente de (AN_h) tend donc vers 0, ce qui signifie que la droite (AN_h) tend vers une position limite horizontale lorsque h tend vers 0. On dit que $\mathcal{C}_f$ possède une demi-tangente horizontale au point A.

6)