Devoir de Noël

I *Si vous n'avez pas encore installé le logiciel Algobox sur votre ordinateur, il est grand temps de le faire ! Voir la colonne des liens sur le mathblog pour le téléchargement et une initiation.*

Soit u la suite définie par son terme initial u_0 (un entier strictement positif) et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

1) On suppose que $u_0 = 35$. Calculer « à la main » u_n pour $1 \leqslant n \leqslant 20$.

2) Certains mathématiciens pensent (sans avoir réussi à le démontrer) que quelle que soit la valeur de l'entier $u_0 > 0$, il existe forcément un rang $n \geqslant 1$ pour lequel $u_n = 1$.
À l'aide d'Algobox, modéliser un algorithme***** permettant de réaliser le programme suivant :
• Demander à l'utilisateur la valeur de l'entier $u_0 > 0$.
• Calculer et afficher la valeur du plus petit rang n pour lequel $u_n = 1$.
$\hookrightarrow$ Si $u_0 = 2016$, quel est le plus petit rang n pour lequel $u_n = 1$?

3) Modéliser cette fois un algorithme***** permettant de réaliser le programme suivant :
• Demander à l'utilisateur la valeur de l'entier $u_0 > 0$.
• Demander à l'utilisateur la valeur d'un entier $A \geqslant 2$.
• Calculer et afficher la valeur du plus petit rang n pour lequel $u_n < A$.

(***** Joindre une sortie imprimante à votre devoir)

II Le but de l'exercice est d'étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (x^3 - 7x - 21)\sqrt{x} \ .$$

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 3x - 3$.
   (a) Dresser le tableau des variations de h sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.
   À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
   (c) En déduire le tableau des signes de h sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Établir que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{7h(x)}{2\sqrt{x}}$.
   (b) Dresser alors le tableau des variations de f sur $[0; +\infty[$.
   (c) Montrer que f possède un minimum sur $[0; +\infty[$, égal à $-2(2\alpha + 9)\sqrt{\alpha}$.