CORRIGE DU DEVOIR A LA MAISON
Inéquations, équations de droites

Exercice 61 p.127

1. a) Pour tout x non nul, $C_m(x)=\dfrac{C(x)}{x}=\dfrac{x^3-300x^2+25000x}{x}=x^2-300x+25000$.

De plus, pour tout x, $(x-150)^2+2500=x^2-300x+22500+2500=x^2-300x+25000$.

Finalement, pour tout x non nul, $C_m(x)=(x-150)^2+2500$.

b) On constate que $C_m(150)=2500$.

De plus, pour tout réel x de l'intervalle]0 ; 300], $C_m(x)-2500=(x-150)^2$.

Un carré étant toujours positif, on a, pour tout x de l'intervalle]0 ; 300] :

$C_m(x)-2500\geq 0 \Leftrightarrow C_m(x)-C_m(150)\geq 0 \Leftrightarrow C_m(x)\geq C_m(150)$.

La fonction C_m admet donc un minimum égal à 2500 sur l'intervalle]0 ; 300] ; il est atteint pour $x=150$.

Autrement dit, le coût mensuel moyen de production minimal vaut 2500 €, il est atteint pour une production de 150 articles.

2. a) Notons $R(x)$ la recette obtenue par la vente de x articles, on a alors : $R(x)=8900x$.

Le bénéfice $B(x)$ est donc :

$B(x)=R(x)-C(x) \Leftrightarrow B(x)=8900x-x^3+300x^2-25000x \Leftrightarrow B(x)=-x^3+300x^2-16100x$

b) Pour x non nul :

- $B_m(x)=\dfrac{B(x)}{x}=-x^2+300x-16100$
- $6400-(x-150)^2=6400-(x^2-300x+22500)=-x^2+300x-16100$

Donc $B_m(x)=6400-(x-150)^2 \Leftrightarrow B_m(x)=80^2-(x-150)^2 \Leftrightarrow B_m(x)=(80-x+150)(80+x-150)$.

On obtient ainsi la forme factorisée de $B_m(x)$: $B_m(x)=(230-x)(x-70)$.

Pour résoudre l'inéquation $B_m(x)\geq 0$, on étudie le signe de $B_m(x)$ à l'aide d'un tableau :

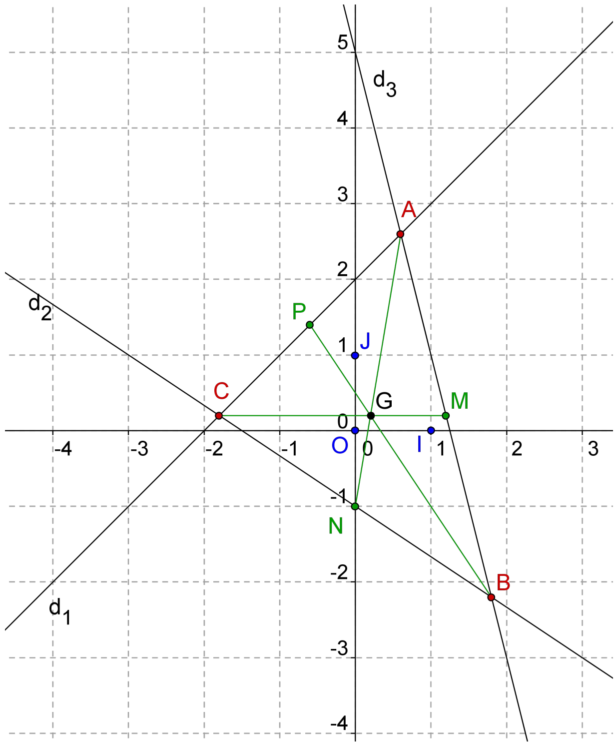
x	0		70		230		300
$x-70$		-	0	+		+	
$230-x$		+		+	0	-	
$B_m(x)$		-	0	+	0	-	

Les solutions de l'inéquation sont les réels de l'intervalle [70 ; 230].

Ainsi, le bénéfice moyen est positif si l'on produit entre 70 et 230 articles.

Exercice 52 p.185

a) Figure



b) Nommons A le point d'intersection de d_3 et d_1, ses coordonnées forment le couple-solution du système suivant :

$$\begin{cases} y=x+2 \\ y=-4x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+5=x+2 \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=5x \\ y=x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3}{5} \\ y=\dfrac{13}{5} \end{cases} \text{ donc A } \left(\frac{3}{5};\frac{13}{5}\right).$$

On obtient de même les coordonnées de B, intersection de d_3 et d_2, ainsi que celles de C, intersection de d_2 et d_1 : B $\left(\frac{9}{5};-\frac{11}{5}\right)$ et C $\left(\frac{-9}{5};\frac{1}{5}\right)$.

c) Les coordonnées du milieu M de [AB] sont : $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc M $\left(\frac{6}{5};\frac{1}{5}\right)$.

De même, les coordonnées du milieu N de [BC] sont : N $(0;-1)$, et celles du milieu P de [AC] sont : P $\left(\frac{-3}{5};\frac{7}{5}\right)$.

d) On utilise la formule de la distance puisque le repère est orthonormé :

- $BG=\frac{4\sqrt{13}}{5}$, $BP=\frac{6\sqrt{13}}{5}$ donc $\frac{BG}{BP}=\frac{2}{3}$;
- $AG=\frac{2\sqrt{37}}{5}$, $AN=\frac{3\sqrt{37}}{5}$ donc $\frac{AG}{AN}=\frac{2}{3}$;
- $CG=2$, $CM=3$ donc $\frac{CG}{CM}=\frac{2}{3}$.

On constate que $\frac{BG}{BP}=\frac{AG}{AN}=\frac{CG}{CM}=\frac{2}{3}$. Les droites (BP), (AN) et (CM) sont les médianes du triangle ABC donc on retrouve la propriété suivante : le centre de gravité G du triangle se trouve aux deux tiers de chaque médiane en partant du sommet.