NOM :
Prénom

CORRIGÉ DS N°4

Dérivation et applications / Trigonométrie / Droites du plan

1ère S1 et 1ère S3
fait le vendredi 20/01/2017

Appréciation :

***Connaître* /12**	***Utiliser* /10**	***Raisonner* /11**	***Écrire et Dire...* /7**
TB B AB I TI NA	TB B AB I TI NA	TB B AB I TI NA	TB B AB I TI NA

	Connaître	Utiliser	Raisonner	Écrire et Dire
ex1 1	X X X X form.add.& ang.ass.	X mes.princ.		X mes.princ
	X X val.remarq.	X calculs		X global
ex1 2	X formule dupli.	X X calculs		X
ex1 3	X valeur remarq.	X X résolution		X cercles
	X X carré & val.rem.	X X solution		X X notations.eq.
ex2 1a	X X ens.deriv.fct.rat.& VI			
ex2 1b	X X X formules dériv.	X X calculs		X X
ex2 2a	X X discrim.racines	X X X calculs		X tableau
	X X signe trin. & quot.	X VI		X X global
	X variations			
ex2 2b	X minimum			X
ex2 3a	X eq.tangente	X X X $f'(1)$; $f(1)$; eq.T_1		X
ex2 3b		X X résolution	X X X mise en eq. & résol.	X X conclu & global
ex3 A	X var fct et signe dériv.		(X) (existence g')	X
ex3 B	X dérivée polyn.	X signe f'		X X dérivable & globa
ex3 C	X angle ass.	X calcul	X démarche	X
ex3 D	X val. remarq.		X X contre-ex & conclu	X
ex3 E	X X vect.dir.			X
	X X crit.colin. & parallel.			
ex4 1a	X def.rg	X X calculs		X
ex4 1b-2a		X X tracés		
ex4 2b	X equation	X X calculs	X X démarche	X X
ex5 1a	X formule	X calculs	X exploiter $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$	
ex5 1b		X X X X constr. & échelle	(X) (éch. pertinente)	
ex5 1c	X X X X angles ass.		X 3ème calcul	X X
ex5 2		X X résolution éq.		X
ex6 1	X minimum	X X calculs	X X contre-ex.& dem.	X
ex6 2	X X dériv. & eq.tg.	X calculs		X
	X meth.pos.relat.	X conclu.	X X	
	X sgn.trin.	X sgn.trin.		X

Exercice 1 : ***Formules de duplication et d'addition - équations trigonométriques***

Soit a un nombre réel.

1) ➩ $\cos\left(a+\dfrac{9\pi}{2}\right)=\cos a\cos\dfrac{9\pi}{2}-\sin a\sin\dfrac{9\pi}{2}$

$=\cos a\cos\left(\dfrac{8\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin a\sin\left(\dfrac{8\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=\cos\dfrac{\pi}{2}\cos a-\sin\dfrac{\pi}{2}\sin a$

$=0\times\cos a-1\times\sin a$

$$\boxed{\cos\left(a+\dfrac{9\pi}{2}\right)=-\sin a}$$

➩ $\sin\left(-a-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\sin(-a)\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}\cos(-a)$

$=-\sin a\times\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos a$

$$\boxed{\sin\left(-a-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}\sin a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos a}$$

2) $\boxed{\cos(2a)=2\cos^2 a-1}$ (formule de duplication)

$\cos(4a)=\cos(2\times 2a)=2\cos^2(2a)-1=2\left(2\cos^2 a-1\right)^2-1=2\left[4\cos^4 a-4\cos^2 a+1^2\right]-1$

Finalement, $\boxed{\cos(4a)=8\cos^4 a-8\cos^2 a+1}$

3) Par lecture sur le cercle trigonométrique, sur $[0\,;2\pi[$ on a :

$\sin x<\dfrac{\sqrt{3}}{2}\iff x\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{3}\right[\cup\left]\dfrac{2\pi}{3}\,;2\pi\right[$

$4\cos^2 x-1=0\iff\cos^2 x=\dfrac{1}{4}\iff\cos x=\sqrt{\dfrac{1}{4}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\dfrac{1}{4}}\iff\cos x=\dfrac{1}{2}$ ou $\cos x=-\dfrac{1}{2}$

Finalement, $\boxed{4\cos^2 x-1=0\iff x\in\left\{\dfrac{\pi}{3}\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\,;\,\dfrac{4\pi}{3}\,;\,\dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

Exercice 2 : ***Dérivation et étude de fonction***

1) a) $x-3=0\iff x=3$ et f est une fonction rationnelle.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est définie et dérivable sur l'ensemble } \mathbb{R}\setminus\{3\}.}$

b) Posons : $u:x\mapsto x^2+7$ et $v:x\mapsto x-3$ Ces fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

et on a : $u':x\mapsto 2x$ et $v':x\mapsto 1$

$f=\dfrac{u}{v}$ donc $f'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$

Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $f'(x)=\dfrac{2x(x-3)-(x^2+7)}{(x-3)^2}=\dfrac{2x^2-6x-x^2-7}{(x-3)^2}$

Finalement, on a bien : $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R}\setminus\{3\},\ f'(x)=\dfrac{x^2-6x-7}{(x-3)^2}}$

2) a) ➩ Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$ $f'(x)$ est du signe de x^2-6x-7 car $(x-3)^2>0$.

Soit Δ le discriminant de x^2-6x-7 : $\Delta=(-6)^2-4\times(-7)=64$ donc $\sqrt{\Delta}=8$

x^2-6x-7 admet deux racines : $x_1=\dfrac{6-8}{2\times 1}=-1$ et $x_2=\dfrac{6+8}{2\times 1}=7$

➩ En outre, $f(-1)=\dfrac{(-1)^2+7}{-1-3}=-2$ et $f(7)=\dfrac{(7)^2+7}{7-3}=14$ On a donc le tableau :

x	$-\infty$		-1		3		7		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f		↗	-2	↘	‖	↘	14	↗	

b) Par lecture du tableau de variations, $\boxed{\text{sur } [4\,;+\infty[,\ f \text{ admet un minimum égal à } 14 \text{ et atteint en } 7.}$

3) a) $f(1) = \dfrac{1^2+7}{1-3} = \dfrac{8}{-2} = -4$ et $f'(1) = \dfrac{1^2 - 6\times 1 - 7}{(1-3)^2} = \dfrac{-12}{4} = -3$

$y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff y = -3(x-1) - 4 \iff y = -3x - 1$

Ainsi, $\boxed{y = -3x - 1 \text{ est une équation de la tangente à } \mathscr{C}_f \text{ en son point d'abscisse } 1.}$

b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Soit T_1 la tangente à $\mathscr{C}_f$ en son point d'abscisse 1 et Δ la droite d'équation $y = x$.

$T_1 \mathbin{/\!/} \Delta \iff T_1$ et Δ ont le même coefficient directeur

$\iff f'(x) = 1 \iff \dfrac{x^2 - 6x - 7}{(x-3)^2} = 1$

Or, $x \neq 3$ donc $T_1 \mathbin{/\!/} \Delta \iff x^2 - 6x - 7 = (x-3)^2 \iff x^2 - 6x - 7 = x^2 - 6x + 9 \iff -7 = 9$

Cette dernière assertion étant fausse on en conclut que $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ n'admet pas de tangente parallèle à } \Delta.}$

Exercice 3 : *Vrai ou Faux ?*

A - $\boxed{\textbf{Faux}}$, la dérivée de la fonction g n'est pas négative sur $\mathbb{R}$.
En effet, d'après son tableau de variations g est strictement croissante sur $]-\infty\,;3[$ donc sa dérivée, si elle existe est strictement positive sur $]-\infty\,;3[$.

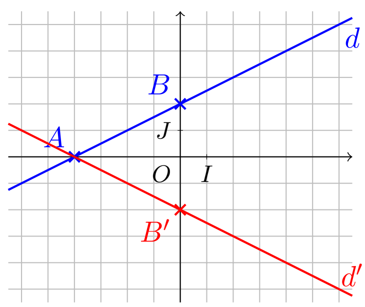
B - $\boxed{\textbf{Vrai}}$, la fonction f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
En effet, f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée : $f' : x \mapsto 3x^2 + 3$.
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 \geqslant 0$ et donc $f'(x) \geqslant 3 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

C - $\boxed{\textbf{Vrai}}$, α solution de $3\cos^2 x - 1 = 0 \implies \pi + \alpha$ solution $3\cos^2 x - 1 = 0$.
En effet, supposons que α est tel que de $3\cos^2 \alpha - 1 = 0$.
D'après la propriété relative aux angles associés : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$.
Ainsi, $3\big(\cos(\pi+\alpha)\big)^2 - 1 = 3(-\cos\alpha)^2 - 1 = 3\cos^2\alpha - 1 = 0$

D - $\boxed{\textbf{Faux}}$, $\sin 2x = 1$ n'est pas équivalente à $\sin x = \dfrac{1}{2}$.
En effet, $\dfrac{\pi}{4}$ est solution de l'équation $\sin 2x = 1$ mais pas de l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

E - $\boxed{\textbf{Faux}}$, Les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.
En effet, $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectifs de d_1 et d_2.
Or, $1 \times (-6) - (-3) \times (-2) = -6 - 6 = -12 \neq 0$ donc $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice 4 : *Droites du plan*



1) a) ➪ Soit $A\,(x_A\,;0)$ le point d'intersection de d et (OI).
$A \in d$ donc $x_A - 2\times 0 + 4 = 0$ donc $x_A = -4$.
Ainsi, $\boxed{d \text{ coupe } (OI) \text{ en } A\,(-4\,;0).}$

➪ Soit $B\,(0\,;y_B)$ le point d'intersection de d et (OJ).
$B \in d$ donc $0 - 2y_B + 4 = 0$ donc $y_B = 2$.
Ainsi, $\boxed{d \text{ coupe } (OJ) \text{ en } B\,(0\,;2).}$

b) On a tracé la droite d dans le repère ci-contre.

2) a) On a tracé d' symétrique de d par rapport à (OI).

b) d' passe par les points A et $B'\,(0\,;-2)$ symétriques respectifs de A et B par rapport à (OI).

$\overrightarrow{AB'}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ et $B'\,(0\,;-2)$. Soit $M\,(x\,;y)$, $\overrightarrow{B'M}\begin{pmatrix}x\\y+2\end{pmatrix}$.

$M \in d' \iff \overrightarrow{AB'}$ colinéaires à $\overrightarrow{B'M}$

$\iff 4(y+2) - (-2)\times x = 0 \iff 2x + 4y + 8 = 0$

Ainsi, $\boxed{2x + 4y + 8 = 0 \text{ est une équation de } d'.}$

N.B. : on pouvait aussi trouver $y = -0{,}5x - 2$ en déterminant l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur.

Exercice 5 : *Encore des questions de trigonométrie...*

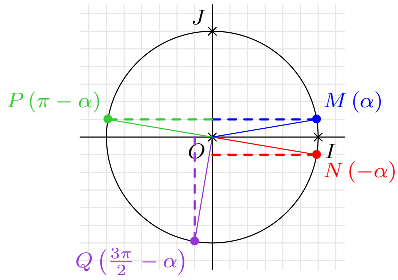
1) a) On a : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ donc $\cos^2\alpha + \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = 1$

donc $\cos^2\alpha = \dfrac{35}{36}$ donc $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{35}{36}}$ ou $\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{35}{36}}$

Or, $\alpha \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\alpha > 0$. ainsi, $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{35}}{6}}$

b) On trace $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé d'unité 6 carreaux. Le point M associé à α est le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse positive et d'ordonnée $\dfrac{1}{6}$.

- $N(-\alpha)$ est le symétrique de M par rapport à (OI).
- $P(\pi-\alpha)$ est le symétrique de M par rapport à (OJ).
- $Q\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ s'obtient en partant de N et en tournant de 3 quarts de tour dans le sens direct.



c)
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{35}}{6}$
- $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha = \dfrac{1}{6}$
- $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{35}}{6}$

2) La droite d'équation $y = -\dfrac{1}{6}$ coupe le cercle en deux points associés aux réels $-\alpha$ et $\pi-(-\alpha)$.

Ainsi, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } \sin x = -\dfrac{1}{6} \text{ est } \{-\alpha+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi+\alpha+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}.}$

Exercice 6 : *Extrema, tangentes et position relative...*

1) ➩ g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.

On pose : $u : x \mapsto (2x-1)$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$

donc : $u' : x \mapsto 2$ et $v' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$g = uv$ donc $g' = u'v + v'u$ ainsi : $g' : x \mapsto 2\sqrt{x} + \dfrac{2x-1}{2\sqrt{x}}$

➩ Donc $g'(1) = 2\sqrt{1} + \dfrac{2\times 1-1}{2\sqrt{1}} = 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

$g'(1) \neq 0$ donc $\boxed{g \text{ n'admet pas de minimum en } 1.}$

N.B. : On pouvait aussi conjecturer graphiquement l'absence de minimum et exhiber une valeur x_0 telle que $g(x_0) < g(1)$ (par exemple $x_0 = 0$)

2) ➩ h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et $h' : x \mapsto 1 + \dfrac{-1}{x^2}$

$h(1) = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$ et $h'(1) = 1 + \dfrac{-1}{1^2} = 0$

$y = h'(1)(x-1) + h(1) \iff y = 0(x-1)+2 \iff y = 2$ Ainsi, $\boxed{y = 2 \text{ est une équation de } T_1.}$

➩ Pour déterminer la position relative de $\mathscr{C}_h$ et T_1 étudions le signe de la différence $h(x)-2$ pour $x>0$:

$h(x) - 2 \geqslant 0 \iff x + \dfrac{1}{x} - 2 \geqslant 0$ Or, $x > 0$ donc en multipliant chaque membre par x on a :

$h(x) - 2 \geqslant 0 \iff x^2 + 1 - 2x \geqslant 0$

$\iff x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \iff (x-1)^2 \geqslant 0$

Cette dernière assertion étant vraie pour tout $x \in]0\,;+\infty[$ donc $\boxed{\text{sur }]0\,;+\infty[, \mathscr{C}_h \text{ est au-dessus de } T_1.}$

N.B. : On pouvait aussi étudier les variations de h et montrer que h admet en 1 un minimum égal à 2 d'où le résultat attendu.