

Exercice 1

① a) f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec

$$a = 1$$

$$b = -4$$

$$c = 1$$

1^{ère} rédaction possible : _____

Pour déterminer les coordonnées du sommet de la

parabole $(\mathcal{P})$ représentative de f , je détermine la

forme canonique de f :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } f(x) = x^2 - 4x + 1$$

$$= (x-2)^2 - 4 + 1$$

$$= (x-2)^2 - 3$$

3^e en déduisant que le sommet de $\mathcal{P}$ est le point $S(2; -3)$

2^e rédaction possible : _____

Je sais que l'abscisse du sommet S de la parabole

$(\mathcal{P})$ représentative de f est :

$$-\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \times 1} = 2$$

Je calcule alors l'ordonnée de S :

$$f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 1 = -3$$

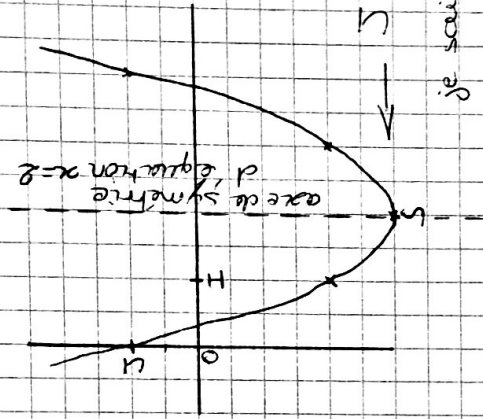
Donc le sommet S de $(\mathcal{P})$ a pour coordonnées $(2; -3)$

En outre comme le coefficient $a = 1 > 0$, $(\mathcal{P})$ est orientée vers le haut.

Pour placer deux autres points, je calcule $f(0) = 1$, et $f(1) = -2$.

Toute parabole admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées, passant par son sommet, donc $(\mathcal{P})$ admet pour axe de symétrie la droite

d'équation $x = 2$. Ceci permet de compléter le tracé.



← J'arrondis bien le sommet car

je sais qu'il y a une tangente horizontale.

$$\textcircled{b)} f(2+\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})^2 - 4(2+\sqrt{3}) + 1$$

$$= 4 + 4\sqrt{3} + 3 - 8 - 4\sqrt{3} + 1$$

$$= 0$$

① c) $\mathcal{Q}$ après le calcul précédent, $2+\sqrt{3}$ est une solution de $f(x) = 0$; c'est à dire que $(\mathcal{P})$ coupe l'axe des abscisses en $M(2+\sqrt{3}; 0)$

Je note $(\mathcal{L})$ l'axe de symétrie de $(\mathcal{P})$ et M' le symétrique de M par rapport à $(\mathcal{L})$. Par symétrie de $(\mathcal{P})$, on sait que M' est un point de $\mathcal{P}$.

Par définition de la symétrie axiale, $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment $[M'M']$.

Or $\mathcal{D}$ a pour équation $x=2$ donc elle est perpendiculaire à l'axe des abscisses (car le repère est orthogonal) et $\Pi(2+\sqrt{3}; 0)$ est sur l'axe des abscisses. Donc la perpendiculaire à Π passant par $\mathcal{D}$ est l'axe des abscisses, on en déduit que Π' est aussi sur l'axe des abscisses, $\Pi'(x_{\Pi'}; 0)$ avec $x_{\Pi'}$ à déterminer.

$S \in \mathcal{D}$ médiatrice de $[\Pi\Pi']$ donc $S\Pi' = S\Pi$
 $S\Pi' = S\Pi$

$$(x_{\Pi'} - 2)^2 + \cancel{(0-2)^2} = (2+\sqrt{3}-2)^2 + \cancel{(0-2)^2}$$

$$(x_{\Pi'} - 2)^2 = 3$$

$$x_{\Pi'} - 2 = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{3}$$

$$x_{\Pi'} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad 2 - \sqrt{3}$$

$2 + \sqrt{3}$ est l'abscisse de Π donc l'abscisse de Π' est $2 - \sqrt{3}$.
 $\Pi'(2 - \sqrt{3}; 0) \in (\mathcal{P})$ donc $f(2 - \sqrt{3}) = 0$

f est une fonction polynôme du second degré donc $f(x) = 0$ admet au plus 2 solutions. J'en ai trouvé 2, donc je les ai toutes trouvées: $\mathcal{S} = \{2 - \sqrt{3}; 2 + \sqrt{3}\}$

Remarque: On peut aussi observer les formules du cours:

Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ une fonction polynôme du 2nd degré.
 L'abscisse du sommet de sa parabole est $\alpha = -\frac{b}{2a}$
 et dans le cas où il y a deux racines ($\Delta > 0$),

$$\text{Elles sont } \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \alpha \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ici on connaît l'abscisse du sommet $\alpha = 2$ et une racine $2 + \sqrt{3}$, on en déduit que l'autre racine est $2 - \sqrt{3}$.

② $S(-1; 4)$ est le sommet de la parabole $(\mathcal{P}')$ représentative d'une fonction g . On en déduit que g est une fonction polynôme du second degré pouvant s'écrire sous forme canonique:

$$g: x \mapsto a(x+1)^2 + 4 \quad \text{où } a \text{ est un coefficient à déterminer.}$$

Or $(\mathcal{P}')$ passe par $A(-3; 0)$, donc $g(-3) = 0$ où

$$0 = a(-3+1)^2 + 4$$

$$0 = a \times 4 + 4$$

$$-4 = 4a$$

$$a = -1$$

$$\text{Finalement: } g: x \mapsto -(x+1)^2 + 4$$

Exercice 2

① En utilisant Geogebra, je conjecture que l'aire du trapèze $RBCQ$ est la plus grande pour $x=2$. (Voir vidéo sur la plateforme TV)

② L'ensemble de définition de S est l'ensemble des valeurs possibles pour x .

Je sais que $x = AR$ où R est un point du segment AB de longueur 10. Donc $0 \leq x \leq 10$.

Je sais aussi que $ARQP$ est un carré où P est un point du segment AD de longueur 6. Donc

$0 < AP \leq 6$. Comme $AR = AP$, j'en déduis que $0 < x \leq 6$.

L'ensemble de définition de S est donc $D_S = [0; 6]$

②b) L'aire d'un trapèze se calcule à l'aide de la formule suivante: $\frac{(petite\ base + grande\ base) \times hauteur}{2}$

$RBCQ$ est un trapèze rectangle de petite base $RQ = AR = x$

grande base $BC = AD = 6$

hauteur $BR = AB - AR = 10 - x$

Donc, pour tout $x \in [0; 6]$, on a:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{(x+6)(10-x)}{2} \\ &= \frac{10x - x^2 + 60 - 6x}{2} \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 30 \end{aligned}$$

②c) Le coefficient devant x^2 est $-\frac{1}{2} < 0$ dans la fonction polynôme du second degré S .

Je note $a = -\frac{1}{2}$; $b = 2$ et $c = 30$ les coefficients de S .

La représentation graphique de S est une portion de parabole tournée vers le bas dont le sommet

$$a \text{ pour abscisse } x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \times (-\frac{1}{2})} = 2$$

$$\text{et pour ordonnée } p = S(2) = -\frac{1}{2} \times 2^2 + 2 \times 2 + 30 = 32$$

S'en déduit que la conjecture est

exacte: pour $x = 2$, l'aire de

$RBCQ$ est maximale et vaut 32 unités d'aire.



0 1 2 3 4 5 6
Courbe représentative de S

Exercice 3

① Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 8x^2 + 12 = 0$ (E_1) je fais un changement de variable en posant $u = x^2$.

Un carré est toujours positif donc u doit être positif.

Je résous dans $\mathbb{R}^+$:

$$u^2 - 8u + 12 = 0 \quad (E_2)$$

$$\text{Calcul du discriminant: } \Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 16 > 0$$

Donc (E_2) admet deux solutions dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{8 - \sqrt{16}}{2} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{8 + \sqrt{16}}{2} \\ &= 4 - 2 = 2 \quad = 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

Ces deux solutions sont bien positives.

S' en déduis que :

$$(E_1) \Leftrightarrow x^2 = 2 \quad \text{ou} \quad x^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{6} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{6}$$

$$\mathcal{S} = \{ \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{6}, -\sqrt{6} \}$$

② Pour résoudre $7x - 9\sqrt{x} + 2 = 0$ (E_1),
je remarque que $\sqrt{x}$ doit être calculable donc l'ensemble
des solutions est inclus dans $\mathbb{R}^+$.

Je pose $u = \sqrt{x}$ (j'entends $u^2 = x$)

La racine carrée d'un nombre est toujours positive,
donc u doit être positif. Je résous dans $\mathbb{R}^+$:

$$7u^2 - 9u + 2 = 0 \quad (E_2)$$

Calcul du discriminant: $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 7 \times 2 = 25 > 0$

Donc (E_2) admet deux solutions :

$$(E_2) \Leftrightarrow u = \frac{9 - \sqrt{25}}{2 \times 7} \quad \text{ou} \quad u = \frac{9 + \sqrt{25}}{2 \times 7}$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{4}{2 \times 7} \quad \text{ou} \quad u = \frac{14}{14}$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{2}{7} \quad \text{ou} \quad u = 1$$

S' en déduis les solutions de (E_1):

$$(E_1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2}{7} \quad \text{ou} \quad \sqrt{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{49} \quad \text{ou} \quad x = 1$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{4}{49}, 1 \right\}$$

③ Soit l'équation (E_3): $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 6 = 0$ d'inconnue x
valeur interdite pour x : 0 car un dénominateur ne
peut pas s'annuler.

Pour résoudre (E_3) je fais un changement de
variable en posant $u = \frac{1}{x}$.

$$(E_3) \Leftrightarrow u^2 + u - 6 = 0 \quad \text{et} \quad u = \frac{1}{x}$$

$u^2 + u - 6$ est un polynôme du second degré, je
calcule son discriminant:

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0 \quad \text{donc il y a}$$

deux racines à ce polynôme.

$$(E_3) \Leftrightarrow \left\{ u = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} \quad \text{ou} \quad u = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} \right\} \quad \text{et} \quad u = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ u = -3 \quad \text{ou} \quad u = 2 \right\} \quad \text{et} \quad u = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = -3 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x} = 2$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$$