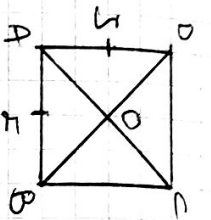


Exercice 1



OI est projeté orthogonal de C sur (AI) et B
donc $\vec{AI} \cdot \vec{AC} = \vec{AI} \cdot \vec{AB}$

$$= AI \times AB \text{ car } \vec{AI} \text{ et } \vec{AB} \text{ sont colinéaires et de même sens.}$$

$$\boxed{\vec{AI} \cdot \vec{AC} = 2}$$

Le projeté orthogonal de A sur (OI) est I donc

$$\vec{AO} \cdot \vec{OI} = \vec{AO} \cdot \vec{OI} = 1 \times 1 = \boxed{-1 = \vec{AO} \cdot \vec{OI}}$$

$\vec{D}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires et de sens opposé donc

$$\vec{D} \cdot \vec{BC} = -D \times B \times C = -1 \times 2 = \boxed{-2 = \vec{D} \cdot \vec{BC}}$$

$$\textcircled{2} \cdot \vec{AI} \cdot \vec{AC} = AI \times AC \times \cos \widehat{IAC}$$

Or ABC est rectangle en B donc d'après Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$AC = \sqrt{8}$$

$$\text{Or } \vec{AI} \cdot \vec{AC} = 1 \times \sqrt{8} \times \cos 45^\circ$$

$$= 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\vec{AI} \cdot \vec{AC} = 2}$$

$$\cdot \vec{AO} \cdot \vec{OI} = -\vec{OA} \cdot \vec{OI} = -OA \times OI \times \cos \widehat{IOA}$$

$$= -\sqrt{2} \times 1 \times \cos 45^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\vec{AO} \cdot \vec{OI} = -1}$$

$$\cdot \vec{D} \cdot \vec{BC} = \vec{D} \cdot \vec{AB} = -\vec{D} \cdot \vec{DA}$$

$$= -D \times DA \times \cos \widehat{ADA}$$

$$= -1 \times 2 \times \cos 0$$

$$\boxed{\vec{D} \cdot \vec{BC} = -2}$$

$$\textcircled{3} \cdot \vec{AO} \cdot \vec{OI} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{AO} + \vec{OI}\|^2 - \|\vec{AO}\|^2 - \|\vec{OI}\|^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\|\vec{AO}\|^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1^2 - \frac{2}{4} - 1 \right)$$

$$\boxed{\vec{AO} \cdot \vec{OI} = -1}$$

$$\cdot \vec{D} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{D} + \vec{BC}\|^2 - \|\vec{D}\|^2 - \|\vec{BC}\|^2 \right)$$

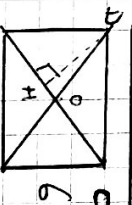
$$= \frac{1}{2} \left(\|\vec{D} + \vec{AB}\|^2 - 1^2 - 2^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\|\vec{AD}\|^2 - 1 - 4 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1^2 - 5 \right)$$

$$\boxed{\vec{D} \cdot \vec{BC} = -2}$$

Exercice 2



Or OD et OC sont des demi-diagonales

A B du rectangle ABCD, donc d'après le

$$\text{théorème de Pythagore :}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\text{donc } OC = OD = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{100}}{2} = 5$$

$$\text{Or } \vec{OC} \cdot \vec{OD} = 5 \times 5 \times \cos \widehat{COD} = 25 \cos \widehat{COD}$$

Exercice 2 (suite)

On peut aussi calculer $\vec{OC} \cdot \vec{OD}$ à l'aide du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\vec{OC} \cdot \vec{OD} &= \frac{1}{2} \left(\|\vec{OC}\|^2 + \|\vec{OD}\|^2 - \|\vec{CD}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (5^2 + 5^2 - 11^2) \\ &= \frac{1}{2} (50 - 8^2) \\ &= \frac{-14}{2} = -7\end{aligned}$$

On en déduit que : $25 \cos \widehat{COD} = -7$

$$\Leftrightarrow \cos \widehat{COD} = \frac{-7}{25}$$

Donc, à la calculatrice :

$$\widehat{COD} \approx 106,3^\circ \text{ arrondi à } 1^\circ \text{ près}$$

② H est le projeté orthogonal de D sur (AC) ou encore $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = \vec{OC} \cdot \vec{OH}$

On sait déjà que $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = -7$

Donc $\vec{OC} \cdot \vec{OH} = -7$ et $O \in [CH]$

$$\Leftrightarrow OH = \frac{-7}{OC} = \frac{-7}{5}$$

On en déduit que $AH = AC - CH$

$$= AC - (CO + OH)$$

$$= 10 - (5 + \frac{7}{5})$$

$$= \frac{25-7}{5}$$

$$AH = \frac{18}{5}$$

$$AH = 3,6$$

Exercice 3

$$f: x \mapsto \frac{2x^2 - 5x + 7}{2x - 3}$$

f est une fonction rationnelle, elle est définie et dérivable pour toute valeur de x qui n'annule pas son dénominateur.

$$Gr \ 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

$$f = \frac{u}{v} \text{ avec } u: x \mapsto 2x^2 - 5x + 7 \quad u': x \mapsto 4x - 5$$

$$v: x \mapsto 2x - 3 \quad v': x \mapsto 2$$

À l'aide de la formule $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, je détermine que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{2} \right\}$, on a :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(4x - 5)(2x - 3) - (2x^2 - 5x + 7) \times 2}{(2x - 3)^2} \\ &= \frac{8x^2 - 12x - 10x + 15 - 4x^2 + 10x - 14}{(2x - 3)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 12x + 1}{(2x - 3)^2}\end{aligned}$$

Un carré est toujours positif donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur $4x^2 - 12x + 1$:

$$\begin{aligned}\Delta &= (-12)^2 - 4 \times 4 \times 1 \\ &= 144 - 16 \\ &= 128 > 0 \text{ donc } 4x^2 - 12x + 1 \text{ a deux racines} \\ x_1 &= \frac{12 - \sqrt{128}}{2} = \frac{12 - 2\sqrt{32}}{2} \approx 0,09 \text{ et } x_2 = \frac{12 + \sqrt{128}}{2} = \frac{12 + 2\sqrt{32}}{2} \approx 2,9\end{aligned}$$

Exercise 3 - (solve)

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{2}+3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2\sqrt{2}+3}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
f		$\nearrow -\frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\searrow$	$\nearrow \frac{\sqrt{2}+1}{2}$	$\searrow$	

Note $f\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1-4\sqrt{2}}{2} \approx -2,3$ à 0,1 près

$f\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1+4\sqrt{2}}{2} \approx 3,3$ à 0,1 près

