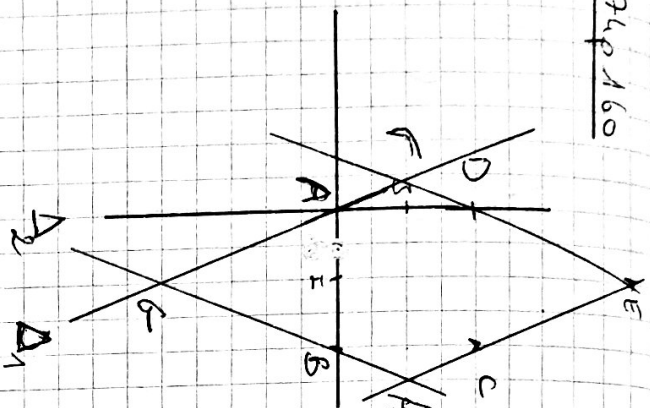




$$\textcircled{a)} E(1, b) \quad D(0, 2)$$

$$\vec{ED} \begin{pmatrix} -1 \\ 2-b \end{pmatrix} \quad \vec{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ b-2 \end{pmatrix}$$

une équation de (DE), de vecteur directeur $\vec{DE}$ est :

$$y = (b-2)x + p \quad \text{où } p \text{ paramètre réel}$$

or $D(0, 2) \in (ED)$ donc

$$2 = (b-2) \times 0 + p \Leftrightarrow p = 2$$

$$\text{donc } \Delta \text{ où } (ED): y = (b-2)x + 2$$

$$\Leftrightarrow (b-2)x - y + 2 = 0$$

$$\textcircled{2} a) \bullet \vec{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-b \end{pmatrix} \text{ donc } (EC): y = (2-b)x + p' \quad \text{où } p' \text{ paramètre réel}$$

$$C(2, 2) \in (EC) \text{ donc } 2 = (2-b) \times 2 + p' \Leftrightarrow p' = 2b-2$$

$$\Delta' \text{ où } (EC): y = (2-b)x + 2b-2$$

$$\bullet \Delta_2 \parallel (ED) \text{ donc de vecteur directeur } \vec{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ b-2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta' \text{ où } \Delta_2: y = (b-2)x + p'' \quad \text{où } p'' \text{ paramètre réel}$$

$$B \in \Delta_2 \text{ donc } 0 = (b-2) \times 2 + p'' \Leftrightarrow p'' = 4-2b$$

$$\Delta' \text{ où } \Delta_2: y = (b-2)x + 4-2b$$

$\textcircled{2} b) \bullet G$ est commun à Δ_1 et Δ_2 donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} y = (2-b)x \\ y = (b-2)x + 4-2b \end{cases} \quad \begin{aligned} \Delta' \text{ où } (2-b)x &= (b-2)x + 4-2b \\ \Leftrightarrow (4-2b)x &= 4-2b \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{et } y = 2-b \quad \Delta' \text{ où } G(1, 2-b)$$

$\bullet H$ est commun à Δ_2 et (EC) donc ses

coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} y = (b-2)x + 4-2b \\ y = (2-b)x + 2b-2 \end{cases} \quad \begin{aligned} \Delta' \text{ où } (b-2)x + 4-2b &= (2-b)x + 2b-2 \\ \Leftrightarrow (2b-4)x &= 2b-4+2b-2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4b-6}{2b-4} = \frac{2b-3}{b-2} = \frac{2(b-2)+1}{b-2} = 2 + \frac{1}{b-2} \end{aligned}$$

$$\Delta' \text{ où } y = (b-2) \left(2 + \frac{1}{b-2} \right) + 4-2b = 2b-4+1+4-2b = 1$$

$$\text{et } H \left(2 + \frac{1}{b-2}; 1 \right)$$

$\textcircled{2} b) \Delta_1 \nparallel (EC)$ de vecteur directeur $\vec{EC}$

$$\text{où } E(1, b) \quad C(2, 2) \quad \vec{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 2-b \end{pmatrix}$$

Donc $\Delta_1: y = (2-b)x + p'$ où p' paramètre réel.

$$\text{Or } A(0, 2) \in \Delta_1 \text{ donc } 0 = (2-b) \times 0 + p' \Leftrightarrow p' = 2$$

$$\Delta' \text{ où } \Delta_1: y = (2-b)x$$

$\textcircled{2} c) F$ est commun à (ED) et Δ_1 donc ses coordonnées sont solutions du système

$$\Delta' \text{ où } (b-2)x - (2-b)x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(b-2)x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2}{2(b-2)} = \frac{1}{2-b}$$

$$\Delta' \text{ où } y = \frac{2-b}{2-b} = 1 \quad \text{et } F \left(\frac{1}{2-b}; 1 \right)$$

③ leurs deux points $E(1, b)$ et $H(\frac{2+b}{2}, 1)$ donc F et H sont sur la droite d'équation $y = 1$ parallèle à l'axe des abscisses.

De même, $E(1, b)$ et $G(1, 2-b)$ donc E et G sont sur la droite d'équation $x = 1$, parallèle à l'axe des ordonnées.

④ Par construction, EFGH est un parallélogramme.

Ses diagonaux sont parallèles aux axes qui sont perpendiculaires car repère orthonormal.

Donc EFGH est un parallélogramme avec des diagonales perpendiculaires, c'est un losange.

⑤ $\vec{EG} = (0, 2-b-b)$

$\vec{EG} = (0, 2-2b)$ donc $\|\vec{EG}\| = |2-2b|$

or $b > 2$ donc $2b > 4$

$\Leftrightarrow -2b < -4$

$\Leftrightarrow 2-2b < -2 < 0$

Donc $\|\vec{EG}\| = EG = 2b-2$

$\vec{FH} = (2 + \frac{1}{b-2} - \frac{1}{2-b}, 0)$

$\vec{FH} = (2 + \frac{2}{b-2}, 0)$

donc $\|\vec{FH}\| = |2 + \frac{2}{b-2}|$

or $b > 2$

$b-2 > 0$

donc $\|\vec{FH}\| = 2 + \frac{2}{b-2}$

⑥ $A(EFGH) = \frac{EG \times FH}{2} = \frac{(2b-2)(2 + \frac{2}{b-2})}{2}$

$= \frac{1}{2} (2b-2) (\frac{2(b-2)+2}{b-2})$

$= \frac{(2b-2)(2b-4+2)}{2(b-2)}$

$= \frac{(2b-2)^2}{2(b-2)}$

⑦ On a donc :

$f'(x) = \frac{2(2-3)(2-1)}{(2-2)^2}$

b) f' est du signe de $(x-3)(x-1)$

x	1	2	3	+ ∞
$x-3$	-	-	-	+
$x-1$	-	0	+	+
f'	-	0	+	+

Donc f minimale pour $x = 3$

⑧ a) $A(EFGH)$ minimale pour $b = 3$ donc $E(1, 3)$

b) Alors $EG = 2 \times 3 - 2 = 4$ et $FH = 2 + \frac{2}{3-2} = 4$

Donc EFGH a ses diagonales de même longueur en plus d'être un losange. C'est donc un carré.