CORRECTION DU CONTROLE DE MATHEMATIQUES N°2

QCM

1. c) $\alpha = \frac{10}{7}$

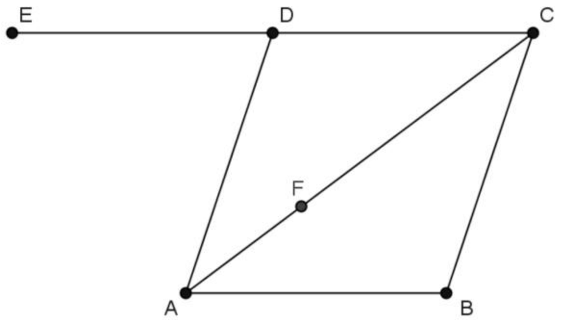
2. c) (1 ; –4) et **d)** $\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$

3. b) (1 ; 1,5) et **c)** (–2 ; –3)

4. b) b = –1

5. a) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et **d)** $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Exercice 1 :



1. Première méthode : calcul vectoriel

a) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$ (d'après la relation de Chasles (RdC))

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ car $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ et RdC

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ car $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$\boxed{\overrightarrow{EF} = 2\,\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}}$

b) $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}$ (RdC)

$\boxed{\overrightarrow{FB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}$

c) On a $2\overrightarrow{FB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}$ donc $2\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EF}$. Les vecteurs $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires donc les points E, F et B sont alignés.

2. Deuxième méthode : avec des coordonnées.

Dans $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

a) $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (RdC) donc $\boxed{\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}}$

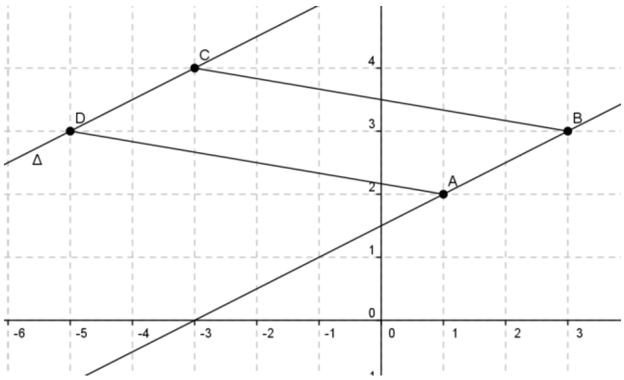
b) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$ donc $\boxed{\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$

c) On a B(1 ; 0), $F\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ car $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et E(–1 ; 1) car $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1-1\\1-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}-1\\\frac{1}{3}-0\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

e) On a alors $3\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ donc $3\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE}$, les vecteurs $\overrightarrow{BF}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont donc colinéaires et les points B, F, E alignés.

Exercice 2 :



Dans $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$, A(1 ; 2), B(3, 3) , C(–3 , 4)

2. Soit Δ la parallèle à la droite (AB) passant par C.

$\overrightarrow{AB}$ est donc un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\3-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

donc Δ admet une équation de la forme : $x - 2y + c = 0$ où c est un réel

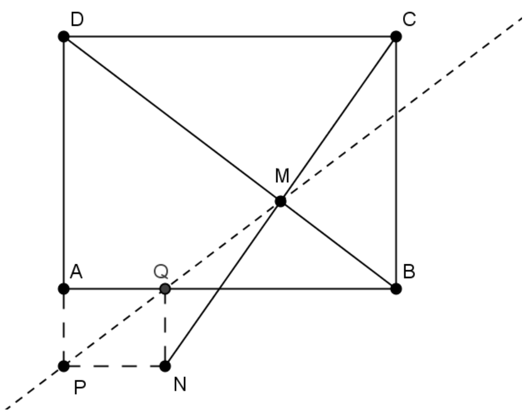
C(–3 ; 4) ∈ Δ ⇔ –3 –2×4 + c = 0 ⇔ –11 + c = 0 ⇔ c = 11

donc on a $\boxed{\Delta : x - 2y + 11 = 0}$

3. D(α ; 3) ∈ Δ ⇔ α – 2×3+ 11 = 0 ⇔ α + 5 = 0 ⇔ α = –5 donc $\boxed{D(-5\,;3)}$

4. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-3+5\\4-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

Exercice 3:



Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

1. B(1 ; 0) , C(1 ; 1) et D(0 ; 1)

2. Soit $M(m; y_M)$

$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1-0\\0-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}m-0\\y_M-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix}m\\y_M-1\end{pmatrix}$

D, B, M alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{DM}$ colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DM}) = 0$

$\Leftrightarrow 1(y_M - 1) - (-1)\times m = 0$

$\Leftrightarrow y_M - 1 + m = 0$

$\Leftrightarrow y_M = 1 - m$ Donc $\boxed{M(m\,;\,1-m)}$

3. Comme N est le symétrique de C par rapport à M, on a $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MN}$ avec $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} m-1 \\ 1-m-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} m-1 \\ -m \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix} x_N - m \\ y_N - 1 + m \end{pmatrix}$donc $\begin{cases} m-1 = x_N - m \\ -m = y_N - 1 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 2m-1 \\ y_N = 1-2m \end{cases}$ donc $\boxed{N(2m-1\,;\,1-2m)}$

4. Comme (QN)//(AD), on a $x_Q = x_N$ et comme Q $\in$ [AB], $y_Q = 0$ donc $\boxed{Q(2m-1\,;\,0)}$.

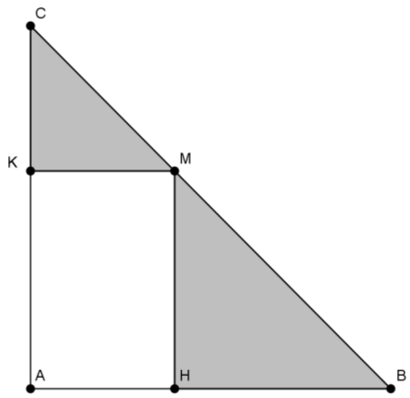
Comme (NP) //(AB), on a $y_P = y_N$ et comme P $\in$ (AD], $x_P = 0$ donc $\boxed{P(0\,;\,1-2m)}$

5. $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} m-0 \\ 1-m-1+2m \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} m \\ m \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 2m-1-0 \\ 0-1+2m \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix} 2m-1 \\ 2m-1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On constate que $m\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PM}$ donc $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires que $(2m-1)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{PQ}$ donc $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Comme $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires au vecteur $\overrightarrow{AC}$, les vecteurs $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

6. Comme $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires, les points P, M, Q sont alignés et comme $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, les points P, M, Q sont situés sur une droite parallèle à la droite (AC). La direction est donc bien fixe.



<u>Exercice 4 :</u>

1. Dans le triangle ABC,
M $\in$ [BC] , H $\in$ [BA] et (MH) // (AC) car (MH) et (AC) sont perpendiculaires à (AB) donc d'après le théorème de Thalès, on a

$\frac{BM}{BC} = \frac{BH}{BA} = \frac{MH}{CA}$ soit $\frac{BH}{BA} = \frac{MH}{CA}$

d'où $\frac{5-x}{5} = \frac{MH}{5}$ donc MH = $5-x$

2. Soit $S(x)$ l'aire de la partie colorée

$S(x)$ = aire(ABC) – aire(AHMK)

$S(x) = \frac{5\times 5}{2} - x(5-x) = x^2 - 5x + \frac{25}{2}$

3. S est un polynôme du second degré, le coefficient de x^2 est positif, donc sa représentation est une parabole tournée vers le haut de sommet d'abscisse $\frac{5}{2}$.

et $S(2,5) = 2,5^2 - 5\times 2,5 + \frac{25}{2} = 6,25$. De plus $S(0) = \frac{25}{2} = 12,5$ et $S(5) = 5^2 - 5\times 5 + \frac{25}{2} = \frac{25}{2} = 12,5$

On a donc le tableau de variation suivant :

x	0	2,5	5
variations de S	12,5 ↘	6,25	↗ 12,5

4. L'aire est donc minimale pour AH = 2,5 cm et elle vaut alors 6,25 cm²

5. $S(x) \le \frac{75}{8} \Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{2} \le \frac{75}{8} \Leftrightarrow x^2 - 5x + \frac{25}{8} \le 0$

Etudions le signe du polynôme $x^2 - 5x + \frac{25}{8}$

Calculons le discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4\times 1\times\frac{25}{8} = \frac{25}{2}$

Le polynôme admet donc deux racines :

$x_1 = \frac{5-\sqrt{\frac{25}{2}}}{2} = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{10-5\sqrt{2}}{4}$ soit $x_1 \approx 0,73$et $x_2 = \frac{5+\sqrt{\frac{25}{2}}}{2} = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{10+5\sqrt{2}}{4}$ soit $x_2 \approx 4,27$

Comme le coefficient de x^2 est positif, le polynôme sera négatif sur $[x_1\,;\,x_2]$

L'ensemble des solutions de $S(x) \le \frac{75}{8}$ est donc $[x_1\,;\,x_2] \cap [0\,;\,5]$ soit $[x_1\,;\,x_2]$