

2) Dérivées de fonctions de référence

Fonction f définie sur	par :	est dérivable sur	Fonction dérivée f' est définie par
$\mathbb{R}$	soit k un réel, $f(x) = k$ (fonction constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$\mathbb{R}$	soit n un entier strictement positif $f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = n x^{n-1}$
$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$[0 ; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$\mathbb{R}$	$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$

Démonstrations :

a) $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k - k}{h} = 0 \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, f est dérivable en x et $f'(x) = 0$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 0$.

b) f fonction affine démonstration dans le I2) du cours.

c) $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R} \text{ et soit } h \neq 0, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} = \frac{2x\cancel{h} + h^2}{\cancel{h}} = 2x + h, \text{ car } h \neq 0$$

$$\text{; donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$, f est dérivable en x et $f'(x) = 2x$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

d) On admet la formule pour les fonctions puissances

e) $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

$$\text{Soit } x \in \mathbb{R}^* \text{ et soit } h \neq 0, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}x(x+h)} = -\frac{1}{x(x+h)}, \text{ car } h \neq 0;$$

$$\text{donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(x+h)} \right) = -\frac{1}{x^2}$$

Donc pour tout x de $\mathbb{R}^*$, f est dérivable en x et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

f) $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $]0; +\infty[$

Soit $x \in]0; +\infty[$ et soit $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

car $h \neq 0$. Ainsi,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Donc pour tout x de $]0; +\infty[$, f est dérivable en x et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

g) les formules de dérivation pour les fonctions trigonométriques sont admises.

Exemples :

1) Déterminer la fonction dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$

En déduire une équation de la tangente T à sa courbe au point d'abscisse (-2)

Solution : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

$$\begin{aligned} \text{Une équation de la tangente } T \text{ est } y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2) &\Leftrightarrow y = 3 \times (-2)^2(x + 2) + (-2)^3 \\ &\Leftrightarrow y = 12x + 24 - 8 \\ &\Leftrightarrow y = 12x + 16 \end{aligned}$$

Donc $T : y = 12x + 16$

2) Soit la fonction f telle que $f(x) = x^{19}$.

- Déterminer l'approximation affine de $f(1+h)$ pour h proche de 0, associée à la fonction f .
- En déduire, sans calculatrice, une valeur approchée de $1,01^{19}$ et $0,99^{19}$.

Solution :

a) $f(x)$ est la forme x^n avec $n = 19$.

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , $f'(x) = 19x^{18}$.

Pour h proche de 0, on obtient l'approximation affine suivante de $f(1+h)$:

$$f(1+h) \approx f'(1)h + f(1) = 19h + 1$$

b) D'après l'approximation affine précédente, on a :

$$\begin{aligned} 1,01^{19} &= f(1,01) \approx 19 \times 0,01 + 1 = 1,19 \\ 0,99^{19} &= f(0,99) \approx 19 \times (-0,01) + 1 = 0,81 \end{aligned}$$

3) Dérivées et opérations

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de fonctions dérivées respectives u' et v' .

Soit k un réel

Dans ces conditions les fonctions $u+v$, ku , uv et u^2 sont dérivables sur I .

De plus, si la fonction v ne s'annule pas sur I , les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I .

	Fonction	Fonction dérivée
Dérivée d'une somme	$u + v$	$u' + v'$
Dérivée d'un produit par un réel, k	$k \times u$	$k \times u'$
Dérivée d'un produit	uv	$u'v + uv'$
Dérivée du carré	u^2	$2u'u$
Dérivée de l'inverse (pour tout x de I , $v(x) \neq 0$)	$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
Dérivée d'un quotient (pour tout x de I , $v(x) \neq 0$)	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Démonstrations :

Dans les démonstrations suivantes, vous pouvez remplacer x par a si vous le préférez.

a) Somme $u + v$

$$u + v : x \mapsto (u + v)(x) = u(x) + v(x)$$

Nombre dérivé de $u + v$ en x est $(u + v)'(x)$

Soit $h \neq 0$, tel que $(x + h) \in D_u \cap D_v$ et $x \in D_u \cap D_v$,

$$\frac{(u + v)(x + h) - (u + v)(x)}{h} = \frac{u(x + h) + v(x + h) - u(x) - v(x)}{h} = \frac{u(x + h) - u(x)}{h} + \frac{v(x + h) - v(x)}{h}$$

$$\text{Et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(u + v)(x + h) - (u + v)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x + h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x + h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x)$$

car u et v sont dérivables en x .

Donc $u + v$ est dérivable en x et $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

b) produit par un réel

$$ku : x \mapsto (ku)(x) = k \times u(x)$$

Nombre dérivé de ku en x est $(ku)'(x)$

Soit $h \neq 0$, tel que $(x + h) \in D_u \cap D_v$ et $x \in D_u$,

$$\frac{(ku)(x + h) - (ku)(x)}{h} = \frac{k \times u(x + h) - k \times u(x)}{h} = k \times \frac{u(x + h) - u(x)}{h}$$

$$\text{Et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(ku)(x + h) - (ku)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} k \times \frac{u(x + h) - u(x)}{h} = k \times u'(x)$$

car u est dérivable en x .

Donc ku est dérivable en x et $(ku)'(x) = k \times u'(x)$

c) produit de 2 fonctions

$$uv : x \mapsto (uv)(x) = u(x) \times v(x)$$

Nombre dérivé de uv en x est $(uv)'(x)$

Soit $h \neq 0$, tel que $(x+h) \in D_u \cap D_v$ et $x \in D_u \cap D_v$,

$$\begin{aligned} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x+h)}{h} \\ &= \frac{v(x+h)(u(x+h) - u(x)) + u(x)(v(x+h) - v(x))}{h} \\ &= v(x+h) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \end{aligned}$$

$$\text{Et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(uv)(x+h) - (uv)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} v(x+h) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + u(x) \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$$

car u et v sont dérivables en x .

Donc uv est dérivable en x et $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$

d) Carré u^2

Comme u est dérivable en x , alors u^2 est dérivable en x , d'après le point précédent.

$$u^2(x) = u(x) \times u(x)$$

$$(u^2)'(x) = u'(x) \times u(x) + u(x) \times u'(x) = 2u'(x) \times u(x)$$

e) Inverse d'une fonction

$$\frac{1}{u} : x \mapsto \left(\frac{1}{u}\right)(x) = \frac{1}{u(x)}$$

Nombre dérivé de $\frac{1}{u}$ en x est $\left(\frac{1}{u}\right)'(x)$

Soit $h \neq 0$, tel que, $(x+h) \in D_u$ et $x \in D_u$ tel que $u(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{u}\right)(x+h) - \left(\frac{1}{u}\right)(x)}{h} &= \frac{\left(\frac{1}{u(x+h)}\right) - \left(\frac{1}{u(x)}\right)}{h} = \frac{\frac{u(x) - u(x+h)}{u(x)u(x+h)}}{h} = \frac{1}{u(x)u(x+h)} \times \frac{u(x) - u(x+h)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{u}\right)(x+h) - \left(\frac{1}{u}\right)(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{u(x)u(x+h)} \times \frac{u(x) - u(x+h)}{h} = \frac{1}{(u(x))^2} \times (-u'(x)) \end{aligned}$$

car u est dérivable en x .

Donc $\frac{1}{u}$ est dérivable en x et $\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{1}{(u(x))^2} \times u'(x)$

f) Quotient $\frac{u}{v}$

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \times \frac{1}{v(x)}$$

Comme u et v sont dérivables et que v ne s'annule pas, alors u et $\frac{1}{v}$ sont dérivables et on peut utiliser la formule de la dérivée d'un produit :

$$\text{donc } f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{v(x)} + u(x) \times \left(\frac{1}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)}{v(x)} + u(x) \times \frac{-v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$\text{donc } \left(\frac{u}{v} \right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$