CHAPITRE 6 : PRODUIT SCALAIRE

I. Produit scalaire de deux vecteurs dans le plan

1. Généralités

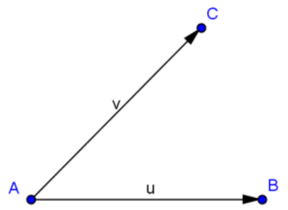
Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan non nuls, et A, B, C trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$

Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ (lire $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$), est le nombre réel obtenu en effectuant le produit des normes par le cosinus de l'angle formé par les deux vecteurs.

$$\vec{u}.\vec{v} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

Si un des vecteurs est nul alors par convention le produit scalaire est nul.

Remarque : A un angle géométrique sont associés deux angles orientés opposés



Ces angles sont les angles ($\vec{u}$, $\vec{v}$) et ($\vec{v}$, $\vec{u}$) ; ces deux angles orientés opposés ont le même cosinus (cf ch 5)

On note donc aussi $\vec{u} . \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$

Exemple : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ de normes respectives 4 et 5 tels que l'angle ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = $\frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$

$\vec{u} . \vec{v}$ =

Propriété **:** Cas particuliers des vecteurs colinéaires.

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u} . \vec{v}$ =

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires, alors $\vec{u} . \vec{v}$ =

Démonstration : *A faire seul*

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur. Le produit scalaire $\vec{u} . \vec{u}$ est appelé carré scalaire et est noté $\vec{u}^2$.

Par conséquent , $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

2. Propriétés

Propriétés : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ $\vec{w}$ trois vecteurs du plan et k un réel

$\vec{u} . \vec{v} = \vec{v} . \vec{u}$ *produit scalaire est symétrique*

$\vec{u} .(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} . \vec{v} + \vec{u} . \vec{w}$

$k(\vec{u} . \vec{v}) = (k\vec{u}). \vec{v} = \vec{u} .(k\vec{v})$ *} produit scalaire est linéaire*

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} . \vec{v} + \vec{v}^2$

$(\vec{u} + \vec{v}).(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Démonstration de $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} . \vec{v} + \vec{v}^2$

Attention $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \neq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Exemple : Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ de normes respectives 4 et 5 tel que l'angle ($\vec{u}$, $\vec{v}$) = $\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Calculer ($\vec{u}$+ $\vec{v}$)^2 et ($\vec{u}$ + $\vec{v}$)($\vec{u}$ − $\vec{v}$)

Propriété : Deux vecteurs sont orthogonaux ssi leur produit scalaire est nul.

Démonstration : *à rédiger seul*

Remarque : le vecteur nul est considéré orthogonal à tout vecteur.

II. Autres expressions du produit scalaire

1. Avec les normes.

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

Démonstration :

Remarque : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 - ||\vec{u}-\vec{v}||^2)$

Démonstration :*à faire seul*

Exemple :

Soit (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormal du plan *(faire figure)*

Soit A(1 ; 2) B(–2 ; 3) C(3 ; –1) et D(–1 ; –2)

Calculer $\vec{AB}.\vec{CD}$

2. Expression analytique

Propriété : Soit (O; $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère **orthonormé** du plan,

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x ; y), (x'; y') alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

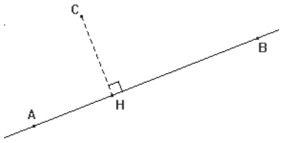
Démonstration :

Exemple : avec les points de l'exemple précédent :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ =

Ne pas confondre cette formule avec celle du déterminant de deux vecteurs det($\vec{u}$, $\vec{v}$) = $xy' - x'y$ permettant de démontrer que deux vecteurs sont colinéaires.

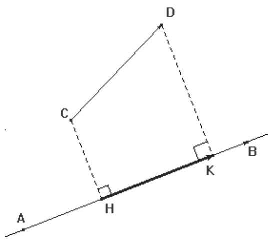
3. Projection orthogonale

Définition **:** On appelle projeté orthogonal d'un point C sur une droite (AB) **l'unique** point H de la droite (AB) tel que : H = C si C $\in$ (AB) et (CH) perpendiculaire à (AB) si C $\notin$ (AB)

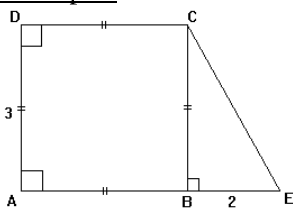


Propriété **:** Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B, C et D quatre points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$
Alors $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{CD}$ = $\overrightarrow{AB}$. $\overrightarrow{HK}$ où H et K sont respectivement les projetés orthogonaux de C et de D sur (AB)

Démonstration :



Exemple *:*



ABCD est un carré de côté 3 et
CBE un triangle rectangle en B tel que BE = 2.
Calculer $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$. $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{ED}$. $\overrightarrow{EB}$
.

III. Applications

1. Equation cartésienne d'un cercle

Propriété : Dans un repère orthonormé, une équation du cercle de centre $A(x_A; y_A)$ et de rayon r est $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$.
Démonstration :

Exemple 1 : ξ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2-10x+4y+23=0$.
Quelle est la nature de ξ.

Exemple 2:

1) Donner une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$ avec $A(-1;3)$.
2) Faire une figure
3) Le point B(1 ;3) appartient-il au cercle ?
4) Donner les coordonnées des points d'intersection avec l'axe des ordonnées.
5) Soit E et F les points de $\mathscr{C}$ d'abscisse –1, donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $E(-1;3+\sqrt{2})$.

Propriété :M est un point du cercle de diamètre [AB] si et seulement si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Si M est un point du cercle de diamètre [AB], distinct de A et de B alors le triangle MAB est rectangle en M.

Donc $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

Si $M=A$ alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

Si $M=B$ alors $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

($\Leftarrow$) Si $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$, alors $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux.

Ou bien $M=A$

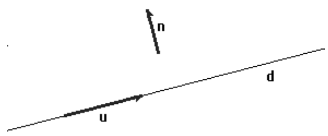
Ou bien $M=B$

Ou bien $(MA)\perp(MB)$

Dans chaque cas, M appartient au cercle de diamètre [AB].

Exemple : Sans un repère orthonormé, donner l'équation du cercle de diamètre [AB] avec $A(3;4)$ et $B(-2;3)$.

2. Equations cartésiennes d'une droite définie par un vecteur normal



Définitions :

Un vecteur non nul $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite (d) s'il existe deux points A, B de (d) tels que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

Un vecteur $\vec{n}$ normal à la droite *(d)* est un vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à un vecteur directeur de *(d)*.

Propriété: Soit (d) une droite, A un point de (d) et $\vec{n}$ un vecteur normal à (d)

Alors la droite (d) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

Démonstration :

($\Rightarrow$) Soit M un point de la droite (d) qui a pour vecteur normal $\vec{n}$.

- Si M et A sont confondus, alors $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
- Si M et A ne sont pas confondus, alors $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur directeur de (d).

Donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

($\Leftarrow$) Soit M un point du plan tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

Ou bien $\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ alors A et M sont confondus donc M appartient bien à la droite (d).

Ou bien M appartient à la droite passant par A et orthogonale à $\vec{n}$ donc M $\in$ (d)..

Propriété: Dans un repère orthonormé,

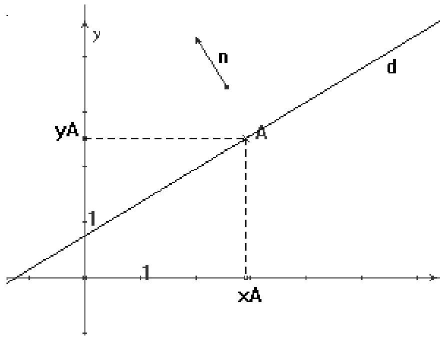
Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$.

Toute droite dont une équation est de la forme $ax+by+c=0$, avec a et b des réels tels que $(a, b)\neq(0; 0)$, admet $\vec{n}(a;b)$ comme vecteur normal.

Rappel : Une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$.

Démonstration :

- $A(x_A;y_A)$; $\vec{n}(a;b)$ et (d) la droite passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.



Soit $M(x;y)\in d$

$\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

or $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A)$ et $\vec{n}(a;b)$, donc $M(x;y)\in d$ si et seulement si

$a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$

$\Leftrightarrow ax-ax_A+by-by_A=0$

$\Leftrightarrow ax+by+c=0$

avec $c=-ax_A-by_A$

- On appelle D l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$, avec a et b des réels non nuls tous les deux.

Si b = 0, alors D est une droite parallèle à l'axe des ordonnées donc tout vecteur colinéaire à $\vec{\imath}$ est normal à D donc $\vec{n}$(a ; 0) est normal à D

Si $b\neq 0$. Alors D est une droite car on a $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

Soit $A(x_0;y_0)$ un point de D alors $ax_0+by_0+c=0$

Pour montrer que $\vec{n}(a;b)$ est un vecteur normal de D il suffit de montrer que pour tout point $M(x;y)$ de D, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Or $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a(x-x_0)+b(y-y_0)=ax-ax_0+by-by_0=ax+by+c=0$ car $c=-ax_0-by_0$ et car $M(x;y)\in D$.

Donc D admet $\vec{n}(a;b)$ comme vecteur normal.

Exemples :

1) Soit $A(1;-3)$ et $\vec{n}(2;5)$. Donner une équation de la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

2) Soit $A(3;-1)$ et $B(2;4)$. Donner une équation de la médiatrice de [AB].

3. Relations métriques dans un triangle

a) Théorème de la médiane.

Théorème : A et B sont deux points, I est le milieu de [AB]

Pour tout point M du plan, $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

Démonstration :

Exemple : Soit ABC un triangle, I le milieu de [AB] tel que AB = 8, AC = 10 et BC = 4.
Calculer CI.

b) Théorème d'Al Kashi

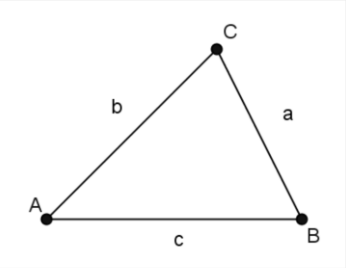
Propriété : Soit ABC un triangle quelconque avec a = BC, b = AC et c = AB

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\widehat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\widehat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\widehat{C}$

Démonstration : Soit ABC un triangle
On note a = BC, b = AC et c = AB.



Remarque : Si ABC est rectangle en A, on a $\cos\widehat{A} = 0$, on retrouve alors le théorème de Pythagore.

Exemple : Soit ABC un triangle tel que AC = 3cm, AB = 6 cm et $\widehat{A} = 30°$.

1. Calculer la valeur exacte de BC.
2. Calculer la mesure de $\widehat{ABC}$ à 10^{-1} près.

c) Aire d'un triangle.

Propriété : Soit ABC un triangle quelconque avec a = BC, b = AC et c = AB et S l'aire de ABC

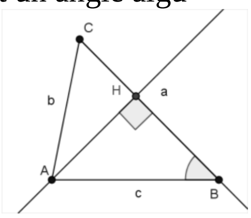
$S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$

Démonstration : Soit ABC un triangle.

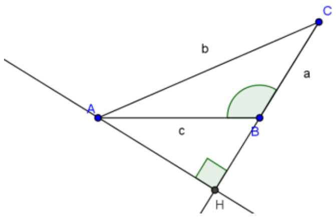
On note H le pied de la hauteur issue de A et S l'aire d'un triangle ABC. On a alors $S = \frac{AH \times BC}{2}$

Calculons AH

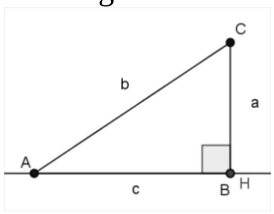
Si $\widehat{B}$ est un angle aigu



Si $\widehat{B}$ est un angle obtus



Si $\widehat{B}$ est un angle droit.



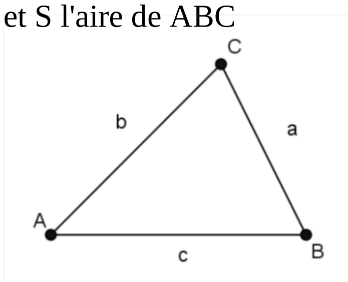
Exemple : Déterminer l'aire exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près du quadrilatère ABCD tel que BC = 3 cm, AC = 6 cm, AD = 2 cm, $\widehat{BCA} = 45°$ et $\widehat{CAD} = 60°$.

d) Formule des trois sinus

Propriété : Soit ABC un triangle quelconque avec a = BC, b = AC et c = AB

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$$

Démonstration : Soit ABC un triangle quelconque avec a = BC, b = AC et c = AB et S l'aire de ABC



Exemple :
Pour construire un pont au-dessus d'une chaussée, on a besoin de connaître la longueur AC.
Pour cela, on prend un point B tel que AB = 10m on a alors $\widehat{A} = 71°$ et $\widehat{B} = 93°$.
Calculer AC.

4. Trigonométrie

Formules d'addition : Pour tous réels a et b

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Démonstrations :
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)
On place sur le cercle trigonométrique deux points A et B tels que ($\vec{i}$, $\overrightarrow{OA}$) = a et ($\vec{i}$, $\overrightarrow{OB}$) = b (en radians)

- cos(a + b) = cos(a – (–b))

- sin(a + b) = $\cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right)$

- sin(a – b) = sin(a + (– b))

Exemple :
Calculer la valeur exacte de cos $\frac{\pi}{12}$ à l'aide des valeurs exactes des cosinus et des sinus de $\frac{\pi}{3}$ *et* $\frac{\pi}{4}$

Formules de duplication : Pour tout réel a

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2\sin a \cos a$

Formules de linéarisation : Pour tout réel a

$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$

$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

Démonstrations : *A faire seul*

- cos(2a) = cos(a + a) =
- sin 2a = sin(a+ a) =
- cos 2a = donc $\cos^2 a$ =

- cos 2a = donc $\sin^2 a$ =

Exemple : Calculer la valeur exacte de sin $\frac{\pi}{12}$ en remarquant que $2\times\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$