Exercice 48 p 101 :

1) Pour tout réel $x \neq 0$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
   $x \longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
   Par somme, f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
   Pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.
   On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

   f admet un maximum local en -1 et un minimum local en 1.

2) a) Le volume est donné par $\mathcal{V} = x^2 h$; on a donc :
      $x^2 h = 500 \Leftrightarrow h = \dfrac{500}{x^2}$.
   b) Comme, la boîte est ouverte (pas de « couvercle »), l'aire latérale de la boîte est donnée par :
      $\mathcal{A} = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \times \dfrac{500}{x^2} = x^2 + \dfrac{2000}{x}$.
   c) $x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
      $x \longmapsto \dfrac{2000}{x^2}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
      Par somme, $\mathcal{A}$ est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
      Pour tout $x \neq 0$, $\mathcal{A}'(x) = 2x - \dfrac{2000}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 2000}{x^2} = \dfrac{2(x^3-1000)}{x^2}$.
      On obtient donc :
      $\forall x > 0, \mathcal{A}'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 1000 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1000 \Leftrightarrow x = 10$.
      En effet, la fonction $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; l'équation $x^3 = 1000$ admet donc au plus une solution.
      Comme, $10^3 = 1000$, on obtient le résultat annoncé.
   d) On obtient le tableau de variations suivant pour $\mathcal{A}$:

x	0		10		$+\infty$
x^3-1000		$-$	0	$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$\mathcal{A}'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$\mathcal{A}$	$\Vert$	$\searrow$	300	$\nearrow$	

La valeur minimale de $\mathscr{A}$ est donc obtenue pour $x = 10$, et le minimum est $\mathscr{A}(10) = 300\text{cm}^2$.

Exercice 55 p 103 :

1) a) Voir le fichier joint.
   b) L'aire du triangle BEI semble maximale pour $BE \approx 0,62$.
2) a) – Les droites (AB) et (FI) sont sécantes en E.
   – Les droites (AF) et (BI) sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès, on a :
   $\dfrac{BI}{AF} = \dfrac{BE}{EA}$, soit $\dfrac{BI}{1-x} = \dfrac{x}{1+x}$.
   On obtient donc : $BI = \dfrac{x-x^2}{1+x}$.
   b) L'aire du triangle BEI est par conséquent :
   $$S(x) = \frac{BE \times BI}{2} = \frac{x \times \dfrac{x-x^2}{x+1}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{x^2-x^3}{x+1}.$$
3) – **Par le calcul**
   a) S est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - x^3$ et $v(x) = 2(x+1)$.
   Comme fontions polynômes, u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;1]$.
   v ne s'annule pas sur $[0;1]$.
   S est donc dérivable sur $[0;1]$ et, pour tout $x \in [0;1]$,
   $$S'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{(2x-3x^2) \times 2(x+1) - (x^2-x^3) \times 2x}{4(x+1)^2} = \ldots = \frac{-x(x^2+x+1)}{(x+1)^2}.$$
   b) Sur $[0;1]$, $S'(x)$ est du signe de x^2+x-1, car $x \geq 0$ et $(x+1)^2 > 0$.
   Etudions le signe de $P(x) = x^2 + x - 1$.
   Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$.
   P admet deux racines réelles distinctes :
   $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   On obtient donc le tableau suivant :

x	0		$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$		1
$S'(x)$	0	$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

c) L'aire est donc maximale pour $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

– **Avec la calculatrice**

a)

b) L'aire est maximale pour $x \approx 0,618034$.

– **Avec un logiciel de calcul formel**

a) Voir fichier joint.

b) L'aire est maximale pour $x \approx 0,618034$.
(On utilise l'instruction « $fMax(f(x), x = 0..1)$ » pour obtenir de la maximum d'une f sur l'intervalle $[0;1]$ avec Xcas).