Correction de l'ex 81 p 226

1) a) *Rappel : le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point de concourt des médiatrices des côtés du triangle.*
Notons A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C' le milieu de $[AB]$.
Utilisons la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}).\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{BC}$$
$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{OA'}.\overrightarrow{BC} \text{ (car A}'\text{est le milieu de } [BC])$$
$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0$$

car (OA') est la médiatrice de $[BC]$.

b) D'après la question précédente, H est sur la perpendiculaire à (BC) passant par A, c'est-à-dire la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
Le rôle des points A, B et C étant parfaitement symétrique, on obtient de la même façon :
$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ et $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$.
H appartient donc aux hauteurs issues de A, B et C ; c'est donc bien l'orthocentre.

2) a) Pour montrer que G est le centre de gravité, il faut montrer que G appartient à au moins deux des médianes.
Montrons par exemple que $G \in (AA')$.
Pour cela, montrons, par exemple, que $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$ sont colinéaires.

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Comme A' est le milieu de $[BC]$, $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$.
Ainsi, $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$.
$\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$ sont donc colinéaires et G appartient bien à la médiane issue de A dans le triangle ABC.

On montre de la même façon que G appartient aux médianes issues des points B et C.

G est donc bien le centre de gravité du triangle ABC.

b) On a $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. D'après la relation de Chasles, on obtient donc :

$$\overrightarrow{OH} = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC})$$
$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{OG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{OG}$$

Ainsi, $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires. Les points O, G et H sont donc alignés.

c)